

La matematica e i suoi modelli

Un esempio tratto dalla vita quotidiana

Scheda 3

1. I modelli e la realtà

2. Le discipline

3. Come studieremo la matematica

1. I modelli e la realtà

In questa unità didattica introduttiva abbiamo richiamato vari esempi di *modelli matematici*, cioè di concetti matematici impiegati per rappresentare situazioni di vario tipo, ad esempio i numeri, per rappresentare misure di grandezze, e le equazioni, per esprimere relazioni tra grandezze. Provate a citare qualche altro modello matematico visto in questa unità didattica.

Vediamo ancora alcuni esempi di **modelli**, riferiti a discipline e campi diversi.

- La *figura 1* è un modello grafico che rappresenta una situazione della attività agricola tipica dei paesi sottosviluppati. Questa situazione spesso viene chiamata *circolo vizioso della miseria*, espressione che sta a indicare un fenomeno che di per sé non ha vie d'uscita: la povertà dei raccolti mantiene la popolazione in stato di miseria e a causa della miseria la popolazione non riesce a trovare i mezzi per migliorare i raccolti.

Si tratta di una rappresentazione grafica simile ai diagrammi di flusso. In questo caso le frecce non indicano il flusso dell'esecuzione ma relazioni di causa → effetto: la freccia "raccolti scarsi" → "sottoalimentazione" significa che a causa della scarsità dei raccolti la popolazione si nutre in misura insufficiente.

Completate il diagramma mettendo correttamente le frecce nell'"anello" superiore.

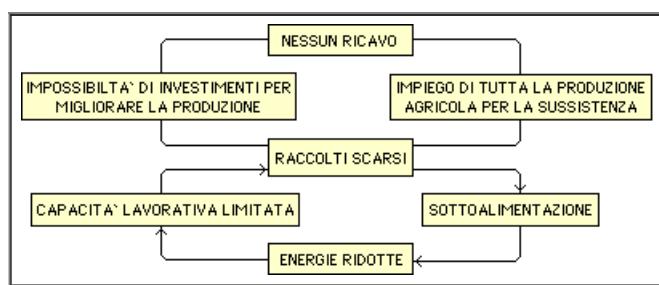


figura 1

Il significato del diagramma è abbastanza evidente: la povertà dei raccolti comporta sia (vedi l'anello inferiore) sottoalimentazione, e quindi limitazione della capacità lavorativa, sia (vedi l'anello superiore) l'impossibilità di vendere o accumulare una parte della produzione in modo da realizzare interventi per migliorare la coltivazione (macchinari, fertilizzanti, piante più produttive o resistenti, opere di irrigazione, ...).

Senza interventi "esterni" queste popolazioni contadine non sono in grado di uscire da questo circolo vizioso. Il doppio anello sta a indicare che non bastano aiuti alimentari (che possono ridurre temporaneamente solo il fenomeno rappresentato dall'anello inferiore) ma occorre un intervento volto a migliorare l'attività agricola: invio di macchinari, costruzione di impianti per produrre macchinari, aiuti per lo sviluppo delle vie di comunicazione, dell'istruzione scolastica, ..., rapporti di mercato più equo (con "prezzi" stabiliti non solo nell'interesse dei paesi più ricchi),

Il modello individua solo i fattori più importanti, trascurandone altri che possono essere rilevanti in situazioni specifiche: mutamenti climatici o interventi dannosi (impiego non controllato di prodotti chimici, coltivazioni intensive di particolari piante, ...) che possono in sterilizzare il terreno, forme di cooperazione tra i contadini che consentono di distribuire le spese per macchinari, irrigazione,

- In *figura 2* è raffigurato un mestolo e un suo modello ingrandito (realizzato nello stesso materiale, legno o metallo) in scala 3 a 1. Volendo immaginare una situazione realistica possiamo pensare che il mestolone sia stato fatto realizzare in questo modo a un artigiano (falegname o fabbro) per impiegarlo in una "Sagra del Minestrone".

Il mestolone riproduce il mestolo originale esattamente sia per forma che per materiale. Ma al primo impiego per estrarre la minestra dal pentolone il manico cede (si spezza o si piega, a seconda del materiale).

Sapete spiegare come ciò sia possibile?

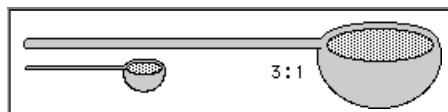


figura 2

- Una nota *regola grammaticale* asserisce che «Un nome singolare terminante in -ie al plurale mantiene la stessa forma. Gli altri nomi singolari terminanti in -e passando al plurale cambiano -e in -i». Esempi: il cane → i cani, l'odore → gli odori, la cantante → le cantanti, la serie → le serie, la specie → le specie.

Vi sono tuttavia numerose eccezioni: il re → i re, il bue → i buoi, il caffè → i caffè, la moglie → le mogli, la superficie → le superfici, la cassaforte → le casseforti, il guastafeste → i guastafeste, il salvagente → i salvagente, il capostazione → i capistazione,

Poi vi sono nomi che non hanno plurale (il latte, la sete, l'equatore, il fogliame, ...).

Infine vi sono le parole di origine straniera: al plurale, quando si parla in italiano, mantengono la stessa forma. Ad esempio, per considerare parole connesse all'uso dei calcolatori: il file → i file (un file - termine inglese, che si legge «fail» - è un documento memorizzato mediante un calcolatore), il mouse → i mouse (il mouse - termine inglese, che si legge «maus» - è un dispositivo che consente di muovere liberamente la "penna" del calcolatore sullo schermo), la routine → le routine (una routine - termine francese, che si legge «rutin» - è un breve programma o una parte di programma che traduce uno specifico procedimento di calcolo).

Le regole grammaticali non rappresentano dunque fedelmente come si deve parlare. Sono solo dei modelli: con essi si cercano di

individuare i modi in cui si manifestano più frequentemente certi comportamenti linguistici, al fine di dare dei punti di riferimento che aiutino le persone nella formulazione e nella comprensione dei discorsi.

Sapete trovare qualche eccezione alla regola «i nomi maschili terminanti in -o passando al femminile modificano -o in -a»?

- Anche i *proverbi* sono dei modelli. Ad esempio «rosso di sera buon tempo si spera» rappresenta il modo in cui in genere evolve un particolare fenomeno naturale.

Individuate tra i seguenti proverbi quelli che hanno la stessa "morale", cioè quelli che sono modelli della stessa norma di comportamento (le "moralì" rappresentate in tutto sono tre):

- | | |
|---|---|
| 1) «non dir quattro se non l'hai nel sacco» | 5) «non è tutto oro quel che luccica» |
| 2) «col tempo e con la paglia maturano le nespole » | 6) «non vendere la pelle dell'orso prima d'averlo ucciso» |
| 3) «l'abito non fa il monaco» | 7) «dai tempo al tempo» |
| 4) «Roma non fu fatta in un giorno» | 8) «ride bene chi ride ultimo» |

• Facciamo un ultimo esempio. Come le *fotografie* sono modelli delle situazioni fotografate (perdonate la tridimensionalità, modificano parzialmente i colori, tagliano delle parti e altre non le mettono bene a fuoco, ...), così le *immagini mentali* che fissiamo nella nostra memoria sono modelli di ciò che abbiamo visto. Ma queste per certi aspetti sono più ricche, per altri più povere delle fotografie. Infatti memorizzando perdiamo molti aspetti su cui non abbiamo fissato l'attenzione e, nello stesso tempo, arricchiamo la nostra immagine inserendo aspetti che traiamo da altri ricordi o deduciamo dalle nostre conoscenze.

Se ci riflettete un attimo troverete sicuramente molti esempi che confermano questa osservazione. Comunque ricordiamo due tipi di esperimenti famosi.

Il primo si riferisce alle testimonianze oculari: nella costruzione degli identikit o nel riconoscimento mediante fotografie i ricordi sono spesso inconsciamente deformati dai pregiudizi, dai prototipi di criminale che il testimone ha in testa o dai suoi tentativi di interpretare i fatti (ad esempio da molti esperimenti risulta che dopo la visione di un filmato di un delitto in cui non si vede mai il volto del colpevole la grande maggioranza dei "testimoni" pretende di riconoscerlo tra un gruppo di fotografie di volti di individui "sospetti").

Il secondo esperimento fa riferimento ai disegni in *figura 3*. Osservate i segmenti AB, CD, EF, GH. Provate mentalmente (senza misure o altri calcoli) a confrontare AB con CD ed EF con GH. Successivamente verificate le conclusioni suggerite dalle vostre impressioni con quelle che potete ottenere usando opportunamente la quadrettatura che fa da sfondo ai disegni.

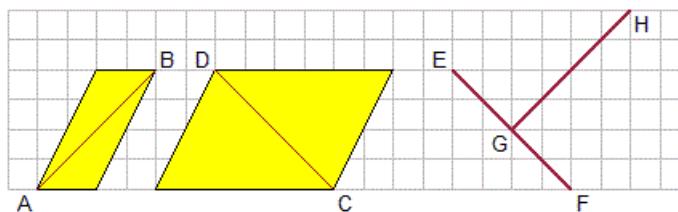
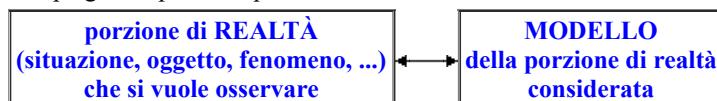


figura 3

- Anche il ritratto del volto di una persona ad opera di un grande pittore, secondo voi, è un modello di tipo diverso rispetto a una fotografia? In che senso?

Riassumendo, con la parola **modello** si intende una rappresentazione di qualche "cosa" (una situazione, un fenomeno, un oggetto, una collezione di oggetti, ...) che viene impiegata al posto di questa cosa.



Gli scopi per cui si impiega un modello possono essere molto vari:

- migliorare la visualizzazione (per es. usare una *riproduzione in scala* al posto della figura originale),
- generalizzare proprietà (per es. dare la *regola grammaticale* "i nomi maschili terminanti in -o passando al femminile modificano -o in -a" al posto dell'elenco: "abbonato → abbonata, accusato → accusata, ..."),
- permettere confronti (per es. paragonare regioni diverse usando la *densità di popolazione* invece dei numeri di abitanti e di chilometri quadrati di superficie),
- cogliere gli aspetti e le cause essenziali di un certo evento (per es. la ricostruzione dei fattori che sono stati all'origine di un certo evento dell'antichità e la sua descrizione che vengono fatte da un *manuale di storia*),
- ...

I modelli possono trascurare o deformare degli aspetti che sono presenti nella cosa originale (le regole grammaticali perdonano le "eccezioni", le riproduzioni cartografiche non rappresentano fedelmente le distanze, il dato della densità di popolazione non permette di ritrovare quanto è estesa la regione o quanti sono gli abitanti, l'interpretazione che uno storico dà alle informazioni a disposizione su un certo evento è soggettiva e può differire da quelle di un altro storico, ...). Sono *rappresentazioni semplificate* che possono facilitare la comunicazione, il ragionamento, ..., ma che devono essere interpretate tenendo conto dei loro limiti.

Per una stessa situazione si possono considerare modelli diversi; in certi casi può risultare più conveniente un modello, in altri può essere più conveniente un altro: tra la *cartina* utilizzata come indice grafico negli orari ferroviari e una cartina stradale, conviene la prima per scegliere le linee ferroviarie con cui raggiungere in treno una località, conviene la seconda per organizzare un viaggio in auto; per valutare lo stato di salute di una persona come informazione sulla sua *temperatura corporea* un dato come 38.4° è sufficiente, e è più "leggibile" di un dato come 38.391°, che sarebbe rilevabile con un termometro più sofisticato.

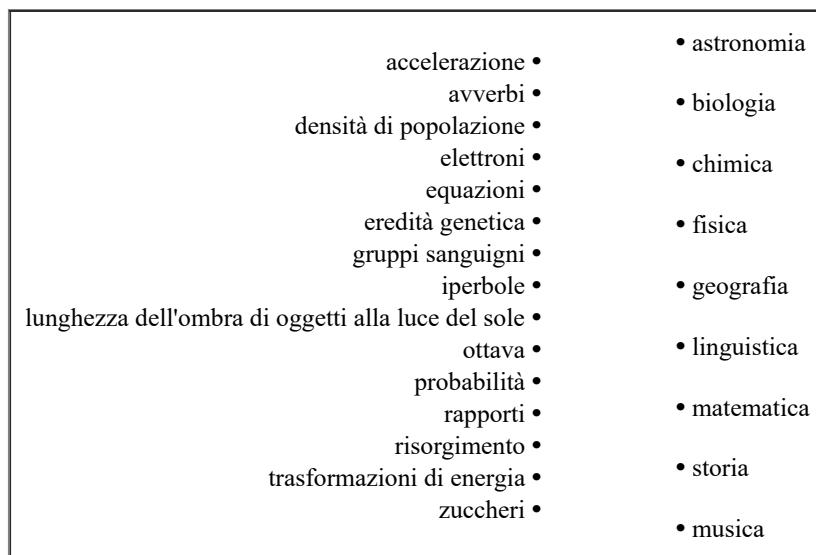
2. Le discipline

Dopo tanti anni di scuola possiamo riflettere su che cosa sono **le discipline**, cioè i campi in cui vengono organizzate le conoscenze e gli studi. Le materie scolastiche non sono altro che raccolte di argomenti che fanno capo a una o più discipline: nella scuola media in

"Lettere" studiate un po' di grammatica, un po' di storia della letteratura, ...; in "Osservazioni scientifiche" studiate un po' di biologia, un po' di fisica, ...; ...

Tra i modelli che abbiamo richiamato nel paragrafo 1 alcuni non fanno capo a una specifica disciplina: i proverbi, le immagini mentali. Altri fanno invece parte di particolari discipline: il modello di figura 1 è impiegato in *geografia* economica; le regole grammaticali sono parti della *linguistica*; anche il problema del "mestolone" ha a che fare con le discipline: il problema di come al variare delle dimensioni di un certo oggetto possono variare altre caratteristiche (ad esempio nel caso di un recipiente la resistenza delle pareti, nel caso di un teatro il modo in cui si diffondono i suoni, ...) è un problema tipico della *scienza delle costruzioni*.

Associate con delle linee ogni argomento elencato a sinistra con la disciplina (o le discipline) tra quelle elencate a destra a cui vi sembra faccia capo.



Una **disciplina** può essere descritta come un sistema di conoscenze, terminologie, simboli, modelli volti a interpretare o spiegare una certa categoria di problemi o di fenomeni.

Ad esempio la **fisica** cerca di determinare i fattori e le condizioni che sono all'origine dei movimenti dei corpi, della trasmissione dei suoni e della luce, dei fenomeni elettrici, delle caratteristiche dei materiali, ...

La **linguistica** cerca di individuare i principali meccanismi attraverso cui, nelle varie lingue, a partire dai suoni vengono formate le parole, le frasi, i discorsi.

La **matematica**, come le altre discipline, si sviluppa attraverso la messa a punto di modelli, la definizione di termini e simboli specifici, ..., ma, a differenza di esse, *non si occupa di una particolare area di fenomeni*.

I modelli della matematica vengono applicati alle situazioni più diverse. Si pensi alle quattro operazioni, alle percentuali e ai grafici, concetti matematici impiegati per rappresentare situazioni tratte praticamente da tutti i campi.

Facciamo un esempio. Se abbiamo una tabella di dati che descrive come una grandezza cambia al variare di un'altra, noi sappiamo costruirne il grafico indipendentemente dal tipo di grandezze: per costruire il grafico di *figura 4* non impieghiamo considerazioni di fisica (1^a tabella), di geografia (2^a) o di economia (3^a), ma in tutti e tre i casi ci riferiamo solamente al valore numerico dei dati. Analogamente se dobbiamo calcolare il 12% di un certo dato, sappiamo applicare l'algoritmo di calcolo indipendentemente dal tipo di dato, non solo, ad esempio, nel caso in cui si tratti di uno sconto sul prezzo di un prodotto.

peso dell'oggetto appeso (kg)	allungamento della molla (cm)	distanza sulla cartina (cm)	distanza reale (km)	peso dei dolci (hg)	costo (euro)
0	0	0	0	0	0
1	0.7	1	0.7	1	0.7
2	1.4	2	1.4	2	1.4
3	2.1	3	2.1	3	2.1
4	2.8	4	2.8	4	2.8

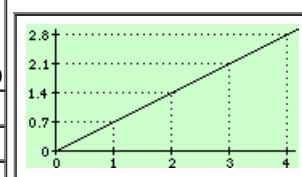


figura 4

Possiamo comportarci in questo modo poiché conosciamo questi concetti (grafico, percentuale) in "astratto".

Più in generale tutti i *modelli matematici* vengono *definiti autonomamente*, *senza riferirsi a fenomeni particolari*, anche se si sono originati in particolari situazioni o attività. Ad esempio i numeri, le operazioni, le prime proprietà aritmetiche si sono sviluppate essenzialmente nell'ambito delle attività di scambio economico; successiva è stata la loro descrizione in termini astratti.

Anche a scuola in genere si passa dall'introduzione dei concetti matematici in situazioni concrete a una loro definizione formale.

Ad es. si può imparare a sommare e sottrarre valori monetari utilizzando alcune "equivalenze". Sapendo che [1 €] equivale a 2 [50 cent], che [50 cent] equivalgono a 5 [10 cent], ... e conoscendo alcune semplici addizioni (1 e 1 fanno 2, 3 e 4 fanno 7, ...) si possono fare gran parte dei calcoli economici elementari:

$$3 [1 \text{ €}] \text{ e } [50 \text{ cent}] \text{ e } [50 \text{ cent}] \text{ fanno } 3 [1 \text{ €}] \text{ e } [1 \text{ €}], \text{ cioè } 4 [1 \text{ €}].$$

Anche ai nostri giorni molte persone sanno operare solo in questo modo, senza saper rappresentare il calcolo come $3 + 0.5 + 0.5 = 4$.

Anche noi in situazioni di questo genere procediamo mentalmente in modi simili. Ma per usare le addizioni in altri contesti o per usare una calcolatrice abbiamo dovuto imparare a rappresentare numeri e operazioni in "astratto".

3. Come studieremo la matematica

Secondo le indicazioni dei programmi in vigore in Italia per tutti gli ordini scolastici, dalla scuola elementare a quella superiore, l'obiettivo principale dell'insegnamento della matematica è far conoscere agli alunni i tipi di modelli matematici più diffusi nelle applicazioni, i linguaggi e le simbologie necessarie per impiegarli e le loro proprietà più importanti, la natura approssimata del loro uso per rappresentare situazioni reali, ...

Nel corso dell'anno *studieremo la matematica* cercando di tener presenti tutti questi aspetti, alternando:

- momenti in cui vedremo come un concetto matematico può originarsi dallo studio di una questione di altra natura e momenti in cui vedremo come la descrizione intuitiva di un concetto matematico può essere sostituita da una definizione formale (come nel passaggio da attività di calcolo con le monete ad attività di calcolo con i numeri),
- momenti in cui applicheremo la matematica e momenti in cui ne studieremo proprietà astratte,
- momenti in cui affronteremo situazioni nuove e momenti in cui ci "alleneremo" con esercizi più ripetitivi.

Rispetto a quanto previsto per la scuola media, da una parte applicheremo la matematica a situazioni più complesse, dall'altra studieremo i concetti matematici da punti di vista più generali.